



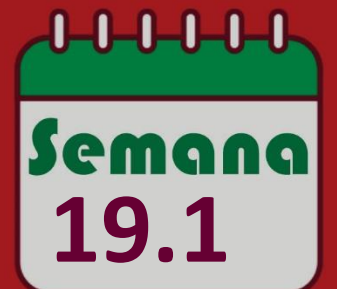
ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA SUCESIONES

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1



CONTENIDOS

- LIMITE DE SUCESSIONES
- ALGEBRA DE LOS LIMITES
- EL TEOREMA DEL SANDWICH
- EL NUMERO e
- CONVERGENCIA. CRITERIOS DE CONVERGENCIA. APLICACIONES

Límite de Sucesiones

Definición.-Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente si existe el siguiente límite:

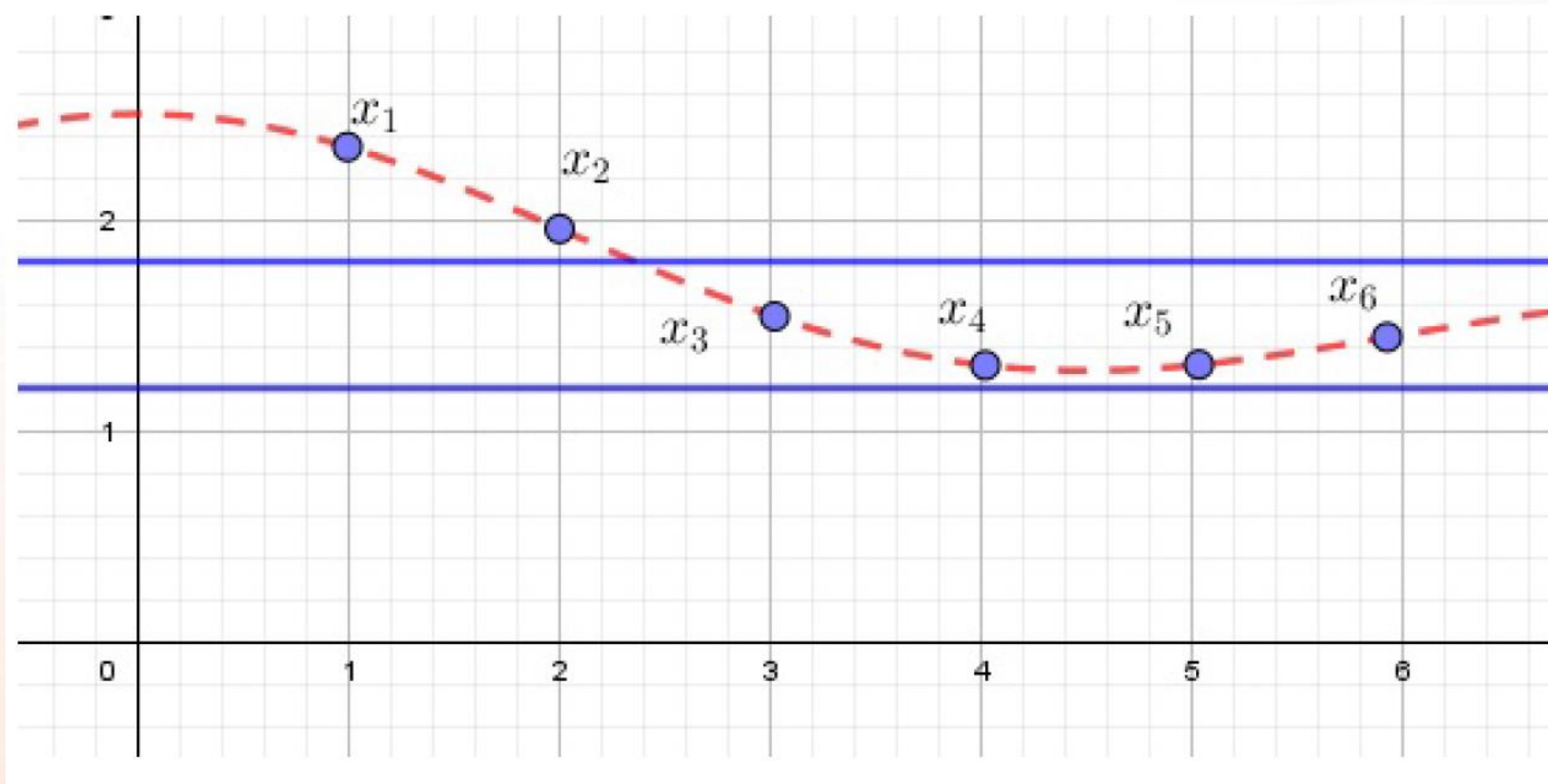
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L \in \mathbb{R}$$

Es decir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists m \in \mathbb{N}: |x_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq m$$

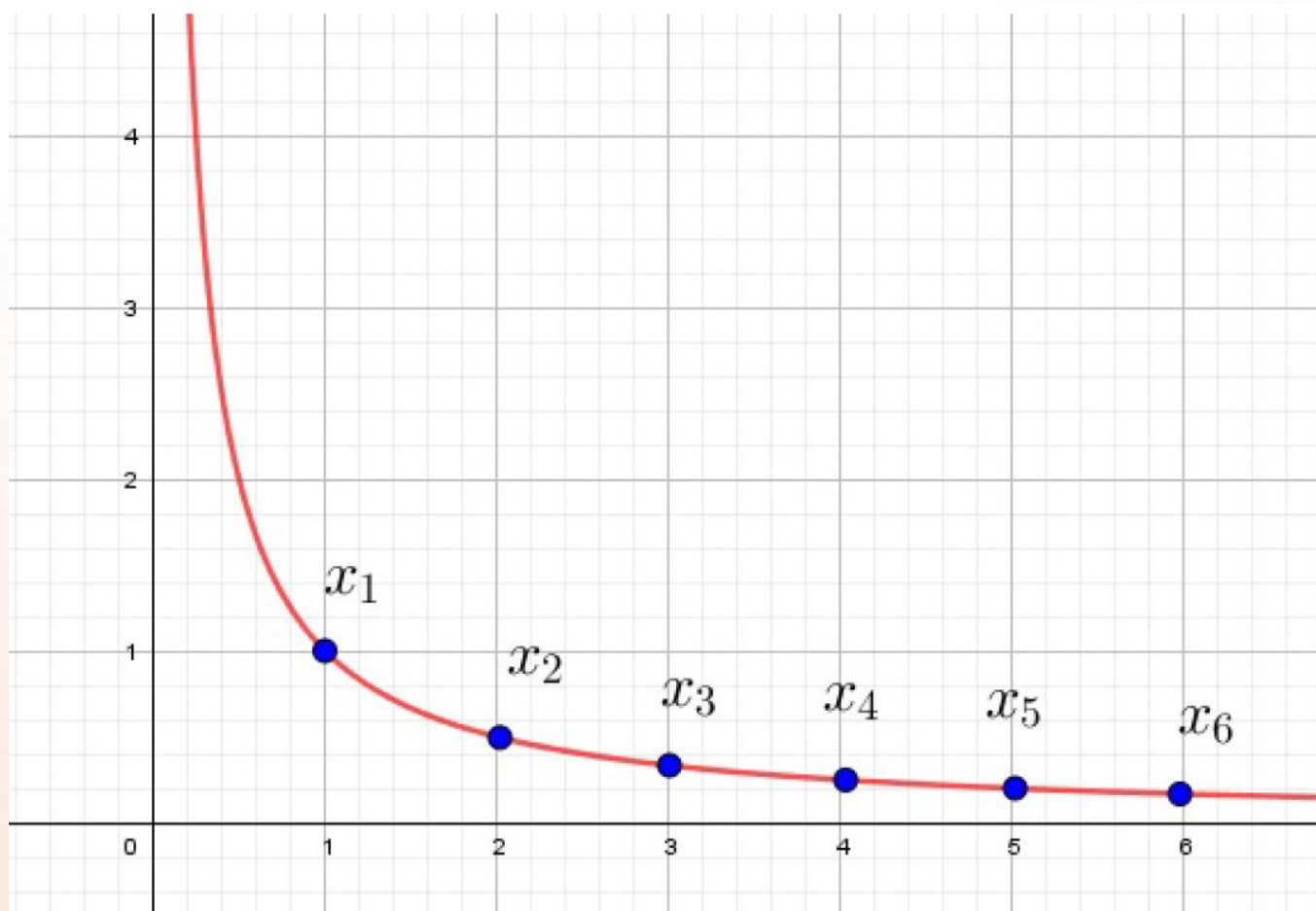
Nota: El límite es único.

Graficamente:



Ejemplo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$



Limites Notables

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0,$ si $p > 0$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1,$ si $a > 0$

c) Sea $|r| < 1,$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1,$

Definición.-Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión divergente si no es convergente.

Ejemplos

1. La sucesión $x_n = (-1)^n$, es divergente.
2. La sucesión $x_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, es divergente
3. La sucesión $x_n = 2n$, es divergente al infinito ∞
4. La sucesión $x_n = -n^2$, es divergente al menos infinito $-\infty$

Ejercicio 1.

Calcule: $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 2n - 5}{n^2}$

RESOLUCIÓN

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 2n - 5}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} \right) = 3$$

Ejercicio 2.

Calcule: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{7}$

RESOLUCIÓN

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 7^{\frac{1}{n}} = 7^0 = 1$$

Ejercicio 3.

Calcule:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^4 + 7n^2 - 3}{7n^5 - n^3 + n - 1}$$

Resolución

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^4 + 7n^2 - 3}{7n^5 - n^3 + n - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^4 + 7n^2 - 3}{7n^5 - n^3 + n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{7}{n^2} - \frac{3}{n^4}}{7n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}} = 0$$

Ejercicio 4.

Calcule:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi n^3 - 6n^2}{\sqrt{3}n^2 - 4n^4 + 1}$$

Resolución

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi n^3 - 6n^2}{\sqrt{3}n^2 - 4n^4 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi n - 6}{\sqrt{3} - 4n^2 + \frac{1}{n^2}} = +\infty$$

TEOREMA (ALGEBRA DE LÍMITES)

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$

α y β números reales cualesquiera. Entonces,

1. Linealidad $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha A + \beta B$

2. Regla del producto $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = A \cdot B$

3. Regla del cociente $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$ siempre que $B \neq 0$

Ejercicio

Calcule:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n^2 + n)(2n + 1)}{6n^3} + \frac{2\sqrt[n]{7}}{3} \right)$$

Resolución

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n^2 + n)(2n + 1)}{6n^3} + \frac{2\sqrt[n]{7}}{3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + \frac{2\sqrt[n]{7}}{3} \right) = \frac{1}{6} (1)(2) + \frac{2}{3} = 1$$

TEOREMA. (SANDWICH)

Si $\{a_n\}, \{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tres sucesiones tales que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo n (o existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$) y $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$

Entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L$

Ejercicio

Calcule: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n} \cos(3n + 1) \right)$

Resolución

Sabemos que:

$$-1 \leq \cos(3n + 1) \leq 1 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos(3n + 1) \leq \frac{1}{n}$$

$$3 - \frac{1}{n} \leq 3 + \frac{1}{n} \cos(3n + 1) \leq 3 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} \cos(3n + 1) = 3$$

Ejercicio

Calcule: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

Resolución

Sabemos que: $5^n \leq 5^n + 3^n \leq 5^n + 5^n$

$$\sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 5^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \sqrt[n]{2} = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n + 3^n} = 5$$

TEOREMA. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones,

Si $\{a_n\}$ es acotada y $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0$

Ejercicio

Calcule: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) (-1)^{n+1}$

Resolución

Sabemos que: $-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1 \rightarrow$ está acotada $|(-1)^{n+1}| \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$$

Por lo tanto: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) (-1)^{n+1} = 0$

EL NUMERO DE EULER

La sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada superiormente, existe un número real que denotamos con e tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e$, por tanto

EL NUMERO DE EULER : e es el número real definido por:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Este número es irracional, más aún es trascendente o no algebraico (no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales)

$$2 < e < 3$$

$$e \approx 2.71828182846$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

LIMITE INDETERMINADO: 1^∞

Dada las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ con $a_n > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n} = 1^\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(a_n - 1)}$$

Ejemplo

Determine el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3 + 2n^2} \right)^{n^2 - 2}$$

RESOLUCIÓN

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3 + 2n^2} \right)^{n^2 - 2} \rightarrow 1^\infty \text{ forma indeterminada}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3 + 2n^2} \right)^{n^2 - 2} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2) \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 3} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2) \left(\frac{2n^2 + 1 - 2n^2 - 3}{2n^2 + 3} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2) \left(\frac{-2}{2n^2 + 3} \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3 + 2n^2} \right)^{n^2 - 2} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^2 + 4}{2n^2 + 3}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{2n^2}{2n^2}} = e^{-1}$$

Propiedad .

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ y f es una función continua, entonces :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n\right) = f(L)$$

Ejemplo.

Calcule :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{2n+5}{3+2n} + \frac{2^{2n+1}}{5^n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{2n+5}{3+2n} + \frac{2^{2n+1}}{5^n}\right) = \arctan\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+5}{3+2n} + 2\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Formas indeterminadas

$$\infty - \infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \frac{3}{\infty} = 0$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \ln 1 = 0$

3. Halle el valor de L si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-5n}{\log(10^n n)} = L$

TEOREMA DE LA MEDIA ARITMETICA

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$$

Ejemplo

Calcule:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3n} + \frac{3}{4n} + \frac{4}{5n} + \dots + \frac{n+1}{(n+2)n} \right)$$

RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3n} + \frac{3}{4n} + \frac{4}{5n} + \dots + \frac{n+1}{(n+2)n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{n+1}{n+2} \right) \\ &\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{n+1}{n+2}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \end{aligned}$$

TEOREMA DE LA MEDIA GEOMETRICA

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = L$$

Ejemplo

Calcule el siguiente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{15} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{5n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

RESOLUCIÓN

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{15} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{5n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{5n} = \frac{2}{5}$$

TEOREMA. Dada las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$

1. Si $a_n < b_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = M$, entonces $L \leq M$
2. Toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente.
3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n-1} = L$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$

Ejercicio: Dada la sucesión (a_n) donde

$$x_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{1+n^3}, & n \text{ impar} \\ \frac{1}{1+n^5}, & n \text{ par} \end{cases}$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) La sucesión no converge
- b) La sucesión converge a cero.
- c) La sucesión tiene dos puntos límites.
- d) La sucesión tiene un único punto límite.
- e) La sucesión no está acotada.

PUNTO LIMITE

Definición. Un número real a es un punto límite de una sucesión $\{a_n\}$ si existe alguna subsucesión $\{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k_n} = a$.

Ejemplos

1. Los puntos límites de $a_n = (-1)^n$ son -1 y 1
2. Los puntos límites de $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ son $-1, 0$ y 1
3. Los puntos límites de $a_n = 3(-1)^n + \frac{2}{n}$ son -3 y 3 ; pues

$$a_{2n} = 3 + \frac{1}{n} \rightarrow 3 \quad \text{y} \quad a_{2n-1} = -3 + \frac{1}{2n-1} \rightarrow -3$$

Nota. Una sucesión convergente tiene un único punto límite.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

CRITERIO DE MONOTONIA

Toda sucesión creciente y acotada superiormente, es convergente

Ejemplo

Dada la sucesión definida recursivamente como $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ y $a_1 = \sqrt{2}$

Demuestre que:

1. (a_n) es creciente
2. (a_n) esta acotada por 2
3. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Ejercicio

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La sucesión $\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ converge a e^{-1} .

II. La sucesión $\left\{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n\right\}$ converge a e^5 .

III. La sucesión $\left\{\left(1 + \frac{2}{n\pi}\right)^n\right\}$ converge a $e^{\frac{\pi}{2}}$.

CRITERIO DE LA RAZON

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos no nulos

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ y $0 \leq L < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Ejemplo

Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!}$

RESOLUCIÓN

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Se concluye que; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

Ejemplo

Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$

CRITERIO DE LA RAIZ

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos no nulos

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ y $0 \leq L < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Ejercicio

Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{n^n}$